ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
«ТУЛУНСКИЙ АГРАРНЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 1 КУРСОВ.

г.Тулун
2020 г.

Рассмотрено и одобрено на заседании предметно-цикловой комиссии *№ 2*
Протокол *№ 2*
от «*12*» *10* *2020 г*
Председатель ПЦК
____
Филимонова Г. В.

Утверждено на заседании методического совета ГБПОУ «Тулунский аграрный техникум»
Протокол № *3*
от «1 » 11 2020 г
Председатель МС ____________________
Арциховская А.А.

Методические рекомендации по решению тригонометрических уравнений для обучающихся 1 курсов разработаны на основе федерального государственного образовательного стандарта (далее ФГОС) среднего общего образования и ФГОС по специальности среднего профессионального образования (далее СПО).

35.02.08. « Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

23.02.07. «Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей»

Организация разработчик: ГБПОУ «Тулунский аграрный техникум»

Разработчик: преподаватель математики Селезнева В. В.

Пояснительная записка

Методические рекомендации по решению простейших тригонометрических уравнений для обучающихся 1 курсов разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) среднего общего образования и ФГОС по специальности среднего профессионального образования (далее СПО). Данные рекомендации могут быть использованы преподавателями математики для подготовки к урокам по дисциплине «Алгебра и начала анализа. Геометрия», а также обучающимися для самостоятельной подготовки по предмету математика.

Изучение тригонометрических уравнений позволяет учащимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, развития умственных способностей, умение извлекать учебную информацию на основе сопоставительного анализа графиков, самостоятельно выполнять различные творческие работы.

В данной работе рассмотрены основные методы решения тригонометрических уравнений, причем, как специфические, характерные только для тригонометрических уравнений, так и общие функциональные методы решения уравнений, применительно к тригонометрическим уравнениям.

Для успешного решения уравнений необходимо знать формулы корней простейших тригонометрических уравнений, значение тригонометрических функций для основных углов и значение обратных тригонометрических функций, универсальные правила решения уравнений. Рассмотрено решение элементарных тригонометрических уравнений, метод разложения на множители, методы сведения тригонометрических уравнений к алгебраическим. Указано, что при решении тригонометрических уравнений широко используются тождества, выражающие соотношение между тригонометрическими функциями одного и разных аргументов. Приведенные методы не исчерпывают все многообразие способов решений тригонометрических уравнений. Однако рассмотренные типы уравнений встречаются наиболее часто и важно уметь распознавать в данном уравнении тот или иной тип.

Простейшие тригонометрические уравнения.

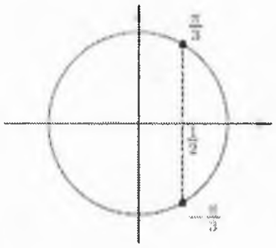
К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида: cos x=a; sin x=a; t g x=a.

Рассмотрим уравнение cos x=a. Из определения косинуса следует, что -1≤ cos x≤ 1. Поэтому, если |a|>1, то уравнение не имеет корней. Например, уравнение cos x = 2 не имеет корней.

- Если модуль числа a не превосходит 1 уравнение имеет решение.

- Если число a принимает значение угла из таблицы, решение можно выполнить с помощью единичной окружности.

Пример: Решить уравнение cos x =1/2.



Напомним, что косинус- это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1;0) вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную ½ имеют две точки окружности M_1 и M_2. Так как ½= cos П/3, то точка M_1 получается из точки P (1;0) поворотом на угол x_1 = П/3, а также на углы x = П/3+ 2Пк,

где к= 1. 2 …. и -1.-2….Точка M_2 получается из точки P (1;0) вокруг начала координат на угол x = -П/3, а также на углы x =- П/3+ 2Пк ,где к= 1.2…. и -1.-2…. Итак, все корни уравнения cos x=1\2 можно найти по формуле x=П\3+2Пk, x=-П\3+2Пk где kϵ Z. Эти две формулы объединяют в одну: x= ± П\3+2Пk где kϵ Z.

- Если число a принимает значение, меньшее по модулю 1, но такого угла в таблице нет. Что тогда? Вводим новый термин – арккосинус. Арккосинусом числа a ϵ|-1; 1| называется такое число мϵ|0; П |, косинус которого равен a. Обозначение: arccos a = м, если cos м = a и мϵ|0;П |. Все корни уравнения cos x=a можно находить по формуле: x = ± arccos a + 2П k, kϵ Z. Данную формулу называют общей формулой решения уравнения.

Пример: cos x=$\sqrt{3}$/2

X= ± arccos $\sqrt{3}$/2+ 2П k, kϵ Z.

X= ± П\6+ 2П k, kϵ Z.

Абсцисса точек единичной окружности принимает и отрицательные значения. Существует формула, позволяющая находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел: arccos(-a) = П- arccos a. Например: arccos(-1\2)= П- arccos1\2

$=\Pi - \Pi\backslash 3 = 2\Pi\backslash 3$. Уравнение, содержащее отрицательный корень будет решаться с применением этой формулы:

Пример: $\cos x = -\sqrt{3}/2$

$$X = \pm\Pi - \arccos\sqrt{3}/2 + 2\Pi\ k,\ k\in Z$$

$$X = \pm\Pi - \Pi\backslash 6 + 2\Pi\ k,\ k\in Z.$$

$$X = \pm 5\Pi\backslash 6 + 2\Pi\ k,\ k\in Z.$$

Для решения уравнений cos x=a есть и частные случаи решения.

$\cos x=0$	$X=\Pi\backslash 2+\Pi к,\ k\in Z$
$\cos x=1$	$X=2\Pi к,\ k\in Z.$
$\cos x=-1$	$X=\Pi+2\Pi\ k,\ k\in Z.$

Рассмотрим уравнение sin x=a. Из определения косинуса следует, что $-1\leq \cos x\leq 1$. Поэтому, если $|a|>1$, то уравнение не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

- Если модуль числа а не превосходит 1 уравнение имеет решение.

- Если число а принимает значение угла из таблицы, решение можно выполнить с помощью единичной окружности.

Пример: Решить уравнение $\sin x = 1/2$.

Напомним, что sin x- ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки Р (1;0) вокруг начала координат на угол х. Ординату, равную ½ имеют две точки окружности M_1 и M_2. ₂. Так как $½ = \sin \Pi/6$, то точка M_1 получается из точки Р (1;0) поворотом на угол $x_1 = \Pi/6$, а также на углы $x = \Pi/6 + 2\Pi к$, где к= 1. 2 …. и -1.-2….Точка M_2 получается из точки Р (1;0) вокруг начала координат на угол $x = 5\ \Pi/6$, а также на углы $x = 5\ \Pi/6 + 2\Pi к$, т е на углы $\Pi - \Pi\backslash 6 + 2\Pi к$, где к= 1.2…. и -1.-2…

Итак, все корни уравнения $\sin x = 1/2$ можно найти по формулам $x = \Pi\backslash 6 + 2\Pi к$, $x = \Pi - \Pi\backslash 6 + 2\Pi к$, $k\in Z$. Эти формулы можно объединить в одну: $x = (-1)^K\ \Pi\backslash 6 + \Pi к$, $k\in Z$. В самом деле, если к – четное число, то получаем корень $\Pi\backslash 6 + 2\Pi к$, а если нечетное число, то корень $\Pi - \Pi\backslash 6 + 2\Pi к$.

- Если число а принимает значение, меньшее по модулю 1, но такого угла в таблице нет. Что тогда? Вводим новый термин – арксинус. Арксинусом числа а $\in|-1;\ 1|$ называется такое число

м$\in|-\Pi\backslash 2;\ \Pi\backslash 2\ |$, синус которого равен а. Обозначение: arcsines а = м, если sin м = а и м$\in|-\Pi\backslash 2;\Pi\backslash 2\ |$. Все корни уравнения sin x =а можно находить по формуле: $x = (-1)^K$ arcsines a + Пк, $k\in Z$. Данную формулу называют общей формулой решения уравнения.

Пример: $\sin x = \sqrt{3}/2\ /\ 2$

$$X = (-1)^K \text{ arcsines } \sqrt{3}/2 + \Pi к,\ k\in Z$$

$$X = (-1)^K\ \Pi/3 + \Pi к,\ k\in Z.$$

Ордината точек единичной окружности принимает и отрицательные значения. Существует формула, позволяющая находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел: arcsines(-a) = - arcsinesa. В нашей формуле общего решения минус добавляет 1 к степени.

Пример: sin x =-$\sqrt{3}$/2 / 2

X = $(-1)^{K+'}$ arcsines $\sqrt{3}$/2 + Пк, k$\in$ Z

X= $(-1)^{K+'}$ П/3 + Пк, k$\in$ Z.

Для решения уравнений sin x=a есть и частные случаи решения.

sin x =0	X=Пк, k$\in$ Z.
sin x =1	X=П/2+2Пк, k$\in$ Z.
sin x =-1	X= -П/2+2Пк, k$\in$ Z.

Рассмотрим решение уравнений t g x=a. Из определения данной функции следует, что тангенс принимает любое действительное значение. Поэтому данное уравнение имеет корни при любом значении a. Данные уравнения можно решить с помощью единичной окружности, либо непосредственно используя формулы.

Пример: t g x= $\sqrt{3}$.

Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведём через т P(1:0) прямую, параллельную оси y, и отложим отрезок PM=$\sqrt{3}$; через точки M и O проведём прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M $_1$ и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим отношение PM к PO. Оно равно $\sqrt{3}$ и равно t g x_1, откуда x_1=П/3.Таким образом, точка M_1 получается из точки P (1;0) поворотом вокруг начала координат на угол П/3, а также на углы X= П/3+2Пк, k$\in$ Z. Точка M_2 получается поворотом точки P (1;0) на угол П/3 +П, а также на углы X= П/3+П+2Пк, k$\in$ Z. Итак, корни уравнения t g x= $\sqrt{3}$ можно найти по формулам X= П/3+2Пк, X= П/3+П(2к+1) где k$\in$ Z. Эти формулы объединяются в одну: X= П/3+Пк, k$\in$ Z.

Для решения уравнения с помощью формул нужно знать определение арктангенса: Арктангенсом числа a$\in$ R называется такое числа A $\in$ (-П/2; П/2), тангенс которого равен a. Обозначение: arctga=A, если tg A=a. Все корни уравнения t g x= a находятся по формуле: X= arctga +Пк, k$\in$ Z. Формула, позволяющая находить значения арктангенса отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел имеет вид: arctg(-a)=- arctga.

Пример: t g x=- $\sqrt{3}$.

X= - arctga +Пк, k$\in$ Z.

X= -П/3+Пк, k$\in$ Z.

Решая простейшие тригонометрические уравнения можно встретить примеры типа: cos2 x=a; sin 1/2x=a; t g(4x-П/3)=a. В решении данных уравнений нужно использовать тождественные преобразования уравнений и формулы решения тригонометрических уравнений.

Пример: cos2 x= $\sqrt{3}$/2

2x= ± arccos $\sqrt{3}$/2+ 2П k, k$\in$ Z

2x=± П/6+ 2П k\:2, k$\in$ Z

X= ± П/12+ П k, k$\in$ Z.

Пример: cos2 x= $-\sqrt{3}$/2

2x= ±П- arccos $\sqrt{3}$/2+ 2П k, k$\in$ Z

$2x = \pm П - П/6 + 2П k,\ k \in Z$

$2X = \pm 5П/6 + 2П k \backslash :2,\ k \in Z$

$X = \pm 5П/12 + П k,\ k \in Z.$

Пример: sin 1/2x=1

$1/2X = П/2 + 2Пк \backslash 1/2,\ k \in Z$

$X = П + 4Пк,\ k \in Z.$

Пример: sin (4x-П/2)=-1/2

$4X - П/2 = (-1)^{K+'}$ arcsines $1/2 + Пк,\ k \in Z$

$4X - П/2 = (-1)^{K+'} П/6 + Пк \backslash + П/2,\ k \in Z$

$4X = (-1)^{K+'} П/2 + Пк \backslash :4,\ k \in Z$

$X = (-1)^{K+'} П/8 + Пк/4,\ k \in Z.$

Тригонометрические уравнения.

Методы решения тригонометрических уравнений.

При решении тригонометрических уравнений все задачи сводятся к тому, чтобы привести к такому виду, чтобы слева стояла элементарная тригонометрическая функция, а справа – число. После того, как это будет достигнуто, следует найти значение аргумента функции, используя одну из основных формул выражения аргумента через обратные тригонометрические функции.

1. Алгебраические уравнения относительно одной из тригонометрических функций.

Необходимо произвести замену неизвестных таким образом, чтобы тригонометрическое уравнение преобразовалось в «удобное» для решения алгебраическое уравнение.

Примеры

1)Решить уравнение **$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.**

Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$.

Его корни: $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -2$. Второе из полученных простейших уравнений не имеет решений, так как $|\sin x| \leq 1$, решения первого можно записать так:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\ (k \in Z)$$

Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо заменить их все на какую-нибудь одну, используя тригонометрические тождества.

2) Решить уравнение **$2\sin x + \cos x = 2$.**

Если в этом уравнении заменим косинус на синус (по аналогии с предыдущими примерами) или наоборот, то получим уравнение с радикалами. Чтобы избежать этого, используем формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного угла:

$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$ и $\cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$.

Делая замену, получаем уравнение относительно $tg\frac{x}{2}$: $4tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = 2(1 + tg^2\frac{x}{2})$.

Квадратное уравнение $3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0$ имеет корни $tg\frac{x}{2} = 1, tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, откуда

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + k\pi, x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi k\ (k \in Z).$$

Это же уравнение можно решить другим способом, вводя вспомогательный угол:

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x).$$

Пусть $\alpha = arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда можно продолжить преобразование: $2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x+\alpha)$. Получаем простейшее уравнение $\sqrt{5}\sin(x+\alpha) = 2$, т. е. $\sin(x+\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, откуда $x + \alpha = arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2k\pi$, или $x + \alpha = \pi - arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2k\pi$.

Ответ получился в другом виде, однако можно проверить, что решения на самом деле совпадают.

2. Понижение порядка уравнения.

Формулы удвоения $sin2x = 2sinxcosx, cos2x = cos^2x - sin^2x, cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x),\ sin^2x == \frac{1}{2}(1 - cos2x)$ позволяют квадраты синуса, косинуса и их произведения заменять линейными функциями от синуса и косинуса двойного угла. Такие замены делать выгодно, так как они понижают порядок уравнения.

Примеры

1)Решить уравнение $\mathbf{\cos 2x + \cos^2 x = \frac{5}{4}}$.

Можно заменить cos2x на 2cos^{2x} —1 и получить квадратное уравнение относительно cos$x$, но проще заменить cos^2x на $\frac{1}{2}(1 + cos2x)$ и получить линейное уравнение относительно $cos2x$.

2) Решить уравнение $\mathbf{\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{65}{81}}$.

Подставляя вместо sin^2x, cos^2x их выражения через $cos2x$, получаем:

$\frac{1}{4}(1-cos2x)^2+\frac{1}{4}(1+cos2x)^2=\frac{65}{81}$,

$1-2cos2x+cos^2 2x+1+2cos2x+cos^2 2x=4\cdot\frac{65}{81}$,

$cos^2 2x=2\cdot\frac{65}{81}-1, cos^2 2x=\frac{49}{81}, \cos 2x=\pm\frac{7}{9}$,

$2x=\pm arccos\frac{7}{9}+k\pi, \quad x=\pm\frac{1}{2}arccos\frac{7}{9}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$.

3. Использование тригонометрических формул сложения и следствий из них.

Иногда в уравнениях встречаются тригонометрические функции кратных углов. В таких случаях нужно использовать формулы сложения.

Примеры

1) Решить уравнение $\mathbf{sinx+sin2x+sin3x=0}$.

Сложим два крайних слагаемых: $(sinx+sin3x)+sin2x=0$, откуда $2sin2xcosx+sin2x=0$, $sin2x(2cosx+1)=0$. Тогда $sin2x=0$, $2x=k\pi, x=\frac{1}{2}k\pi$ *или* $2cosx=-1, x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$.

2) Решить уравнение $\mathbf{sin3xsin5x=sinxsin7x}$.

Преобразуем произведение синусов в сумму: $\frac{1}{2}(cos2x-cos8x)=\frac{1}{2}(cos6x-cos8x)$,

откуда $cos2x=cos6x$. Полученное уравнение можно решить разными способами: 1) воспользоваться формулами сложения; 2) преобразовать $cos6x-cos2x$ в произведение. Удобнее воспользоваться условием равенства косинусов двух углов $2x$ и $6x$: $6x=\pm 2x+2\pi k\ (k\in Z)$.

Получаем два уравнения: $6x=2x+2\pi k, 4x=2\pi k, x=\frac{1}{2}k\pi$, $6x=-2x+2\pi k, 8x=2k\pi, x=\frac{1}{4}k\pi$.

Здесь решения второй серии содержат в себе все решения первой серии. Учитывая это, ответ можно записать короче: $x=\frac{k\pi}{4}\ (k\in Z)$.

4. Однородные уравнения.

Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень, называется однородным. Его можно решить, выполнив деление на старшую степень синуса (или косинуса).

Так как $1=sin^2 x+cos^2 x$, то постоянные слагаемые можно считать членами второй степени.

Пример: $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 4$p: .

Заменяя 4 на $4(sin^2 x + cos^2 x)$,получаем:
$x + 3sinxcosx - 4cos^2 x = 0, tg^2 x + 3tgx - 4 = 0,\ tgx = 1, tgx = -4,$
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -arctg4 + k\pi \quad (k \in Z).$

5. Переход к половинному углу

Рассмотрим этот метод на примере:

Пример 6. Решить уравнение: 3 sin x – 5 cos x = 7.

Решение.

6 sin (x / 2) · cos (x / 2) – 5 cos ² (x / 2) + 5 sin ² (x / 2) =

= 7 sin ² (x / 2) + 7 cos ² (x / 2) ,

2 sin ² (x / 2) – 6 sin (x / 2) · cos (x / 2) + 12 cos ² (x / 2) = 0 ,

tg ² (x / 2) – 3 tg (x / 2) + 6 = 0 ,

6. Введение вспомогательного угла

Рассмотрим уравнение вида:

a sin x + b cos x = c,

где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?) :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как cos φ и sin φ (здесь φ - так называемый вспомогательный угол), и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=C,$$

или $$\sin(x+\varphi)=C,$$

и его решение: $x=(-1)^k\cdot\arcsin C-\varphi+\pi k$,

где $\varphi=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1$

П р и м е р . Решить уравнение: $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1$.

Р е ш е н и е . Здесь $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1}=2$:

$$(\sqrt{3}/2)\cdot\sin 3x-(1/2)\cdot\cos 3x=1/2,$$

$$\cos(\pi/6)\cdot\sin 3x-\sin(\pi/6)\cdot\cos 3x=1/2,$$

$$\sin(3x-\pi/6)=1/2,$$

отсюда, $x=(-1)^k\cdot\pi/18+\pi/18+\pi k/3$.

Приемы решения тригонометрических уравнений, требующих искусственных преобразований.

1. Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же тригонометрическую функцию.

Пример. Решите уравнение $\mathbf{2(2\cos 4x+1)\cos x=1}$.

Решение. Раскроем скобки и преобразуем произведение

$4\cos 4x\cos x$ в сумму: $4\cos 4x\cos x+2\cos x=1;\ 2\cos 5x+2\cos 3x+2\cos x=1.$

Умножим обе части уравнения на $\sin x$. Заметим, что $x=\pi n$, $n\in Z$ не является решением данного уравнения. $2\sin x\cos 5x+2\sin x\cos 3x+2\cos x\sin x=\sin x$. Преобразуем левую часть уравнения:

$\sin 6x-\sin 4x+\sin 4x-\sin 2x+\sin 2x=\sin x$, $\sin 6x=\sin x$, или $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{7x}{2}=0$, тогда

$\sin\frac{5x}{2}=0$ или $\cos\frac{7x}{2}=0$, т.е. $x=\frac{2\pi k}{5}, k\in Z;\ x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}, m\in Z.$

Исключим из найденных серий корни вида $x=\pi n$, $n\in Z$:

а) $\frac{2\pi k}{5}\neq\pi n, n\in Z: k\neq\frac{5\pi}{2}, n\in Z$. Ясно, что n - четное число, т.е. $n=2l, l\in Z$, а потому $k\neq 5l, l\in Z$.

б) $\frac{\pi(1+2m)}{7} \neq \pi n, n \in Z; m \neq \frac{7n-1}{2}, n \in Z$. Тах как $m \in Z$, то $n = 2p+1, p \in Z$, но тогда $m \neq 7p+3, p \in Z$.

Ответ: $\frac{2\pi k}{5}, k \in Z, k \neq 5l, l \in Z;\ \ \frac{\pi}{7}(1+2m), m \in Z, m \neq 7p+3, p \in Z.$

2. Прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа, одной и той же тригонометрической функции.

Пример. Решите уравнение $\mathbf{tgx \cdot tg2x = tg3x \cdot tg4x}$.

Решение. Область определения уравнения задается неравенствами:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3};\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

Прибавим к обеим частям уравнения по единице. $tgxtg2x + 1 = tg3xtg4x + 1$;

$$\frac{cosx}{cosxcos2x} = \frac{cosx}{cos3xcos4x}.$$

Разделим обе части уравнения на $cosx \neq 0$ и после преобразований получим.

$$cosx + cos3x = cos7x + cosx; cos7x - cos3x = 0; sin2xsin5x = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{5}l, l \in Z$.

Из первой серии корней области определения принадлежит только $x = \pi m, m \in Z$, но это серия корней содержится в серии $x = \frac{\pi}{5}l, l \in Z$. Нетрудно убедиться, что $x = \frac{\pi}{5}l, l \in Z$ входит в область определения. Например: $\frac{\pi}{5}l \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, 4l \neq 5 + 10n, 4l - 10m \neq 5,$ что верно, поскольку левая часть - число четное, а правая - нечетное.

Ответ: $\frac{\pi}{5}l, l \in Z$.

3. Тождественные преобразования одной из частей уравнения.

Пример. Решите уравнение $\mathbf{cos7x = cos^3x}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$(cos7x - cos5x) + (cos5x - cos3x) + (cos3x + cosx) + cosx = cos^3x;$$

$$-2sin6xsinx - 2sin4xsinx - 2sin2xsinx + cosx = cos^3x;$$

$$-2sinx(sin6x + sin4x + sin2x) = cosx(cos^2x - 1);$$

$$-2(2sin4xcos2x + sin4x) + sin^2xcosx = 0;$$

$8sin^2xcosxcos2x(2cos2x+1)-sin^2xcosx=0.$

Откуда $sin^2x\cdot cosx=0$, тогда $x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$ или $8cos2x(2cos2x+1)-1=0;$

$16cos^2 2x+8cos2x-1=0.$

Легко видеть, что $cos2x=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}, x=\pm\frac{1}{2}arccos\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}+2\pi k, k\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}n, n\in Z;\ \pm\frac{1}{2}arccos\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}+2\pi k, k\in Z.$

4. Использование свойств пропорции.

Необходимо помнить, что применение равенств

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}, \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}, \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ и т. д. приводит к изменению области определения уравнения. Так, у пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ существует ограничение: $b\neq 0, d\neq 0$, а у пропорции $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ имеет место другое ограничение: $a\neq -b\ и\ c\neq -d$.

Пример. Решите уравнение $\frac{\mathbf{sin5x}}{\mathbf{sinx}}=\mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\mathbf{2x}\right).$

Решение. Применяя формулу тангенса разности, получим уравнение: $\frac{sin5x}{sinx}=\frac{1-tg2x}{1+tg2x}$. Используем свойство пропорции: $\frac{sn5x+sinx}{sin5x-sinx}=\frac{2}{-2tg2x}$

; $\frac{2sin3xcos2x}{2sin2xcos3x}=-\frac{cos2x}{sin2x}; tg3x=-1; 3x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$

$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z.$ Область определения исходного уравнения:

$x\neq\pi q, q\in Z; x\neq -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z.$

В ходе решения произошло сужение области определения, добавились новые, ограничения: $sin5x-sinx\neq 0, sin2x\neq 0, cos2x\neq 0,$

откуда $x\neq\frac{\pi}{2}p, p\in Z; x\neq\pi q, q\in Z; x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t, t\in Z.$

Проверим, удовлетворяют ли исходному уравнению значения

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z; x=\frac{3}{2}\pi+2\pi d, d\in Z; x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t, t\in Z.$$

а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ \frac{sin\frac{5}{2}\pi}{sin\frac{\pi}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right), 1=1$ -верное равенство,

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z$ - решение исходного уравнения.

б) $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi d,\frac{\sin\frac{15}{2}\pi}{\sin\frac{3}{2}\pi}=tg\left(\frac{\pi}{4}-3\pi\right),1=1-$ верное равенство.

в) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t,\frac{\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{5}{2}\pi t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t\right)}=tg\left(-\frac{\pi}{4}-\pi t\right);\ \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t\right)}=-tg\frac{\pi}{4};$ -1 = -1 - верное равенство,

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n,\frac{\pi}{2}+\pi f,\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t\left((n,f,t)\in Z\right).$

5. Решение тригонометрических уравнений методом экстремальных значений.

При решении некоторых тригонометрических уравнений бывает удобно использовать ограниченность функций, $sinx$ и $cosx$. Покажем это на конкретных примерах.

Пример 1. Решите уравнение $\mathbf{\sin 18x+\sin 10x+\sin 2x=3+\cos^2 x}$.

Решение. Так как $sin18x+sin10x+sin2x\le 3$, то $3+cos^2 2x\le 0$, $cos^2 2x\le 0$, откуда $cos2x=0$ и возможные корни данного уравнения $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,n\in Z.$ Подставив эти значения в левую часть уравнения, получим $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+9\pi n\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+5\pi n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=3,3\sin\left(\frac{\pi}{2}++\pi n\right)=3,$ а последнее равенство возможно только при $\pi=2k$.

Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z$ - решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z.$

Пример 2. Решите уравнение $\mathbf{\sin^5 x+\cos^4 x=2-\sin^7 x}$.

Решение. Легко видеть, что $sin^5 x\le sin^2 x$ и $cos^4 x\le cos^2 x$.
Следовательно, $sin^5 x+cos^4 x\le 1$, но тогда $2-sin^7 x\le 1$, $sin^7 x\ge 1$, откуда $sinx=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z$ — возможные корни данного уравнения. Подстановка $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z$ в данное уравнение показывает, что эти числа действительно являются его корнями.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z$.

6. Уравнения, содержащие модуль функции и корень четной степени

Пример 1.

$|\cos x|=\sqrt{3}\sin\ x,\quad m.\kappa.\quad |f(x)|\ge 0\ \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \sqrt{3}\sin x, \\ \cos x = -\sqrt{3}\sin x, \end{array}\right. \\ \sin x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$$

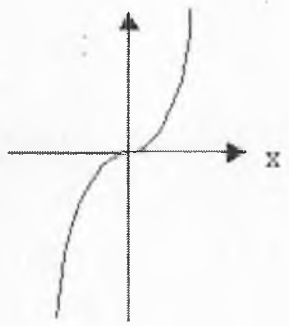
При отборе корней нет надобности решать неравенство, достаточно вынести корни на тригонометрический круг и выбрать нужные.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m; \quad \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad m, n \in Z$

Пример 2.

$\sqrt{ctgx} = \sqrt{2\cos x};$

Решение: Учитывая ОДЗ функций, получим:



Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m; \quad n, m \in Z$

Уравнения повышенной сложности

1. $2\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0 \mid : \cos^3 x \ne 0;$

т.к. уравнение однородное тригонометрическое 3-ей степени

$2tg^3x + 2tg^2x - tgx - 1 = 0;$

Разложим левую часть на множители, сгруппировав члены, получим

$(tg\,x + 1)(2tg^2x - 1) = 0$; $tgx = -1$ $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

$tgx = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\pm arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2. $6\sin^2x + \sin x\cos x - \cos^2x = 2$;

$4\sin^2x + \sin x\cos x - 3\cos^2x = 0$; $|:\cos^2x \neq 0$;

т. к. уравнение однородное тригонометрическое 2-ой степени

$4\text{tg}^2x + \text{tg}\,x - 3 = 0$;

$\text{tg}x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

$\text{tg}x = \frac{3}{4}$; $x = \text{arctg}\,\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

$\text{arctg}\,\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

3. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;

сгруппировав первое с третьим, второе с четвертым слагаемые левой части и применив формулы суммы и разности синусов, получим

$2\sin 3x\cos 2x + 2\sin 3x\cos 5x = 0$;

вынесем в левой части общий множитель за скобки и применим формулу суммы косинусов

$2\sin 3x \cdot 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$;

$\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$

$\cos\frac{7x}{2} = 0$, $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in Z$

$\cos\frac{3x}{2} = 0$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}$, $m \in Z$.

Произведем отбор корней, воспользовавшись тригонометрической окружностью

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

$\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in Z \setminus \{7m+3 | m \in Z\}$.

4. $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}} = 2;$

воспользуемся формулой косинуса двойного угла

$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 2;$

$\sin\frac{x}{2} = 1,$

$\sin\frac{x}{2} \neq 0;$

$\sin\frac{x}{2} = 1;$

$x=\pi + 4\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\pi + 4\pi k$, $k \in Z$.

5. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$

понизим степень, воспользовавшись формулами косинуса двойного угла

$1 + \cos x + 1 + \cos 3x - 1 + \cos 4x - 1 + \cos 8x = 0;$

сгруппируем слагаемые и воспользуемся формулой суммы косинусов

$2\cos 2x \cos x + 2\cos 2x \cos 6x = 0;$

$2\cos 2x \, 2\cos 3{,}5x \cos 2{,}5x = 0;$

произведение всюду определенных множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих множителей равен нулю

$\cos 2x = 0 \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

$\cos 3{,}5x = 0 \quad 3{,}5x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$

cos 2,5x=0; 2,5x=$\frac{\pi}{2}+\pi k$, k є Z;

x=$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, n є Z

x=$\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, m є Z

x=$\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, k є Z .

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, n є Z;

$\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, m є Z;

$\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, k є Z .

Примеры для самостоятельного решения:

1. 2sin2(x) + 3 cos(x) = 0
2. sin(7x)= ½
3. cos(3x)= √3/2
4. cos(-x) = -1
5. tg(4x) = √3
6. ctg(0.5x) = -1.7
7. Решить уравнение sin(3x)= √3/2 и найти все корни на отрезке [π/2; π].
8. ctg2(x) + 2ctg(x) + 1 =0
9. 3 sin 2(x) + √3sin (x) cos(x) = 0
10. 3sin2(3x) + 10 sin(3x)cos(3x) + 3 cos2(3x) =0
11. cos2(2x) -1 - cos(x) =√3/2 -sin2(2x) + sin(x) cos(x) = 0
12. Найдите сумму корней уравнения 2sinx = –1 на указанном промежутке $\left(-\frac{\pi}{6};2\pi\right)$
13. Найдите количество корней уравнения 4cos ^{2}2x = 1 на указанном промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right]$
14. Найдите сумму наименьшего положительного и наименьшего отрицательного корней уравнения sinx cos$\frac{\pi}{8}$ + sin $\frac{\pi}{8}$ cos x = $\frac{1}{2}$ на указанном промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right]$.
15. sin (2x-П/2)=-1
16. sin x/5=-1/2
17. sin 4x=0
18. cos(2 x+П/3)= $\sqrt{3}$/2
19. cos6 x= 1
20. Cos(3 x+П/4)=- $\sqrt{3}$/2
21. Cos x/4= 0
22. Cos x/8= 1,5
23. t g 5x=- 3
24. t g(2 x+П/6)=1

Литература:

1. Алексеев А. Тригонометрические подстановки. // Квант. – 1995. - №2. –с. 40 – 42.
2. Выгодский М. Я. «Справочник по элементарной математике». М., «Наука», 1982 г.
3. Г. И. Глейзер История математики в школе. – М.: «Просвещение» 1983г.
4. Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. «12 уроков по тригонометрии» - М.: Илекса, 2013.- 200 с.:ил.
5. Крамор В.С. Тригонометрические функции. – М.: Просвещение, 1979.
6. Сост. Гряда Н. Н. и др. Обобщающее повторение в системе подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения», Армавир, 2005г.
7. Цукарь А.Я. Упражнения практического характера по тригонометрии //Математика в школе. 1993-№3- с 12-15.
8. Шаталов В.Ф. Методические рекомендации для работы с опорными сигналами по тригонометрии. - М.: Новая школа, 1993.